



توضیحات

۱. از این که تصمیم گرفته‌اید در مدرسه زمستانی علوم ریاضی شریف شرکت کنید بسیار مفتخریم. متأسفانه به دلیل محدودیت امکانات، توانایی پذیرش همه‌ی علاقه‌مندان را نداریم. این آزمون برای این طراحی شده است که یکی از پارامترهای پذیرش علاقه‌مندان برای حضور در مدرسه باشد.
۲. برای پاسخ‌دادن به سوالات این آزمون، نیاز به دانش عجیب و غریبی ندارید. معلومات عمومی ریاضیات دبیرستان، برای پاسخ‌دادن به سوالات کافی هستند. یک هدف ما از این آزمون، این است که شما با چند مسأله‌ی نه‌چندان سخت (!) چند ساعتی دست و پنجه نرم کنید. پس به جای این که در این آزمونک به نتیجه فکر کنید، از مسأله حل کردن لذت ببرید.
۳. در کنار سوال‌های ریاضی که باید به آن‌ها فکر کنید، از شما می‌خواهیم در چند خط، خودتان را معرفی کنید و علت تمایلتان برای حضور در مدرسه‌ی زمستانی علوم ریاضی شریف را برایمان بنویسید.
۴. برای آپلود کردن پاسخ‌هایتان، حداکثر تا ساعت ۲۳ روز جمعه، ۲ اسفند مهلت دارید. برای آپلود کردن پاسخ‌ها، باید این کار را از طریق سایت مدرسه زمستانی علوم ریاضی شریف انجام دهید. اگر به سایت مراجعه کنید، می‌بینید که پاسخ هر سوال را باید در یک فایل pdf جداگانه بارگذاری کنید. حجم فایلی که برای هر سوال می‌توانید آپلود کنید، حداکثر ۵/۰ مگابایت است. اگر حجم فایلی که دارید زیاد است، ابتدا باید حجمش را کمتر از نیم مگابایت کنید و سپس آپلود کنید.
۵. خواهشمندیم پاسخ‌هایتان را خوش خط و خوانا بنویسید.
۶. مانند هر آزمون دیگر، یکی از حساسیت‌های ما شباهت بیش از اندازه و غیرمعقول پاسخ‌های دو نفر با هم است. در صورت مشاهده شباهت غیرمعقول و بیش از اندازه بین پاسخ‌ها، تقلب‌کنندگان از شرکت در مدرسه زمستانی محروم خواهند شد.
۷. نمرات بیش از آن که به جواب‌های شما تعلق بگیرد، به استدلال‌های شما داده خواهد شد. سعی کنید پاسخ‌هایتان را به اندازه‌ی کافی توضیح دهید و حتی‌الامکان از عباراتی مثل «واضح است.» و «بدیهی است.» اجتناب کنید.
۸. از تعداد زیاد صفحات و حجم این آزمون هم نترسید! سختی یا آسانی یک مسأله را طولانی یا کوتاه بودن صورتش، تعیین نمی‌کند (=).
۹. موفق باشید!

مساله ۱

روزی نیوشا داشت در زیرزمین خانه قدیمی‌شان به دنبال اشیای عتیقه و چیزهای هیجان‌انگیز می‌گشت که ناگهان به یک دستگاه برخورد کرد. در توضیحات این دستگاه آمده بود که این دستگاه یک رشته متشکل از حروف الفبای انگلیسی (مثلا $aham$) به عنوان رشته‌ی حافظه به همراه تعدادی دستور دریافت می‌کند که هر دستور به صورت یک رشته، یک فلش و رشته‌ای دیگر است (مثلا $aa \rightarrow a$) و کاری که می‌کند به این صورت است: در هر مرحله از اولین دستور شروع کرده و به دنبال رشته سمت چپ فلش در رشته‌ی حافظه می‌گردد. اگر رشته‌ی مورد جست‌وجو پیدا نشد به سراغ دستور بعد می‌رود و در غیر این صورت در اولین جایی (از سمت چپ) که این رشته را در رشته‌ی حافظه پیدا کرد، آن را حذف کرده و رشته‌ی سمت راست فلش را به جای آن قرار می‌دهد و این مرحله تمام شده و دوباره از اولین دستور شروع به جست‌وجو کردن و جایگزین کردن می‌رود. برای مثال اگر رشته‌ی حافظه aab باشد و اولین دستور $aa \rightarrow b$ ، بعد از اولین مرحله رشته aa حذف شده و جای آن b قرار گرفته و بنابراین رشته حافظه به bb تبدیل می‌شود. (دقت کنید که رشته‌ی سمت راست فلش می‌تواند چیزی نباشد(تهی باشد)). در این حالت در صورت پیدا شدن رشته سمت چپ فلش دستگاه صرفاً آن را حذف کرده و چیزی جایگزین آن نمی‌کند). کار دستگاه زمانی تمام می‌شود که عبارت سمت چپ فلش هیچ‌یک از دستورات دستگاه در رشته‌ی حافظه پیدا نشود. در این صورت دستگاه متوقف شده و خروجی دستگاه رشته‌ای است که در رشته‌ی حافظه قرار دارد. برای مثال اگر دنباله دستورات به صورت زیر باشد:

$$aa \rightarrow a$$

$$bb \rightarrow b$$

اگر به ماشین رشته‌ی $aaabbabaabbb$ را به عنوان ورودی بدهیم، رشته‌ها در هر مرحله به شکل زیر تغییر می‌کنند:

$$aabbabaabbb$$

$$abbabaabbb$$

$$abbababbb$$

$$abababbb$$

$$abababb$$

$$ababab$$

و بعد از ۶-امین مرحله دیگر دنباله تغییر نکرده و بنابراین آخرین رشته نوشته شده به عنوان خروجی دستگاه قرار داده می‌شود.

نیوشا که فردی بسیار کنجکاو و خلاق است سوالی برایش پیش می‌آید:

(آ) آیا می‌توان تعدادی دستور به دستگاه داد تا به ازای هر رشته‌ی حافظه ورودی به شکل $\langle abaababaaba...ab \rangle$ ، خروجی دستگاه به صورت $babababbab...ba$ باشد. یعنی در واقع رشته‌ی حافظه ورودی یک رشته متشکل از a و b باشد که با یک $\langle \rangle$ محصور شده است و خروجی آن همان رشته‌ی ورودی است که جای b های آن a و جای a های آن b قرار داده‌ایم و $\langle \rangle$ ها نیز از آن حذف شده‌اند.

(ب) نیوشا بعد از موفقیت در جواب دادن به سوال اول به سراغ سوالی پیچیده‌تر می‌رود. این بار نیز می‌خواهد ببیند که آیا می‌توان تعدادی دستور به دستگاه داد تا به ازای هر رشته‌ی حافظه ورودی به شکل سوال قبل، خروجی دستگاه رشته‌ی معکوس شده‌ی رشته‌ی a و b های ورودی باشد. یعنی مثلاً به ازای ورودی $\langle abbaba \rangle$ خروجی دستگاه $ababba$ باشد.

در هر قسمت جواب درست (دستورات خواسته شده) مقداری از نمره‌ی آن بخش را دارد و توضیحات شما برای درستی این دستورات، باقی نمره را. بنابراین اگر فکر می‌کنید دستوراتی کار می‌کنند ولی دلیل آن را نمی‌دانید، آن دستورات را بنویسید تا در صورت درستی، بخشی از نمره را بگیرید. اما برای گرفتن نمره کامل هر بخش نیاز به توضیح برای درستی دستورات نوشته شده می‌باشد.

مساله ۲

چند وقتی است نیوشا در این فکر است که چه زمانی می‌توانیم یک مستطیل $m \times n$ را با مستطیل‌های $a \times b$ کاشی‌کاری کنیم؟ (اعداد m و n و a و b اعداد طبیعی هستند و منظورمان از کاشی‌کاری، قرار دادن مستطیل‌ها به صورت عمودی یا افقی و به نحوی است که با یکدیگر هم‌پوشانی نداشته باشند و کل ناحیه را هم بپوشانند.)

(آ) نیوشا حدس می‌زند که یک مستطیل با ابعاد 17×28 را نمی‌توان با مستطیل‌های با ابعاد 4×7 پوشاند. آیا می‌توانید این حدس را اثبات یا رد کنید؟

(ب) در حالت کلی مساله (پوشاندن مستطیل با ابعاد $m \times n$ با مستطیل‌های با ابعاد $a \times b$)، ثابت کنید شرط زیر لازم و کافی هستند:

(لازم و کافی به این معنی است که اگر شرط زیر برقرار باشند، می‌توان کاشی‌کاری را انجام داد و در غیر این صورت، نمی‌توان.)

(آ) mn بر ab بخش‌پذیر باشد.

(ب) هم m و هم n را می‌توان به صورت مجموع a ها و b ها نوشت. یعنی ضرایب نامنفی t و s و t' و s' چنان موجود باشند که:

$$m = ta + sb$$

$$n = t'a + s'b$$

(ج) m یا n (یا هر دو) بر a بخش‌پذیر باشد و m یا n (یا هر دو) بر b بخش‌پذیر باشد.

مساله ۳

مدتی است که نیوشا با دوستان ناباب همنشینی می‌کند. در این مدت، علاقه‌ی زیادی به شرط‌بندی پیدا کرده است و هر روز با دوستش فیروزه شرط‌بندی می‌کند. نیوشا همیشه قبل از اینکه بخواهد میزان شرط را تعیین کند دوست دارد احتمال برنده‌شدنش را بداند؛ اما متاسفانه (یا خوشبختانه!) نیوشا بیشتر به هندسه علاقه‌مند است و از احتمالات، چندان سر در نمی‌آورد. شما باید این احتمال‌ها را برایش بدست آورید. در هر یک از بازی‌های زیر احتمال برد نیوشا را محاسبه کنید:

(آ) نیوشا و فیروزه به طور همزمان یک تاس سالم (تاسی که در آن احتمال آمدن هر ۶ عدد برابر باشد) را پرت می‌کنند، اگر مقدار بدست آمده برای دو تاس بیش از دو واحد اختلاف داشته باشد نیوشا برنده خواهد شد.

(ب) نیوشا و فیروزه هر یک دستگاهی دارند که به طور تصادفی عددی حقیقی در بازه صفر تا یک چاپ می‌کند و همزمان باهم از دستگاه عدد می‌گیرند، اگر عدد نیوشا حداقل $\frac{1}{3}$ بیشتر از عدد فیروزه باشد نیوشا برنده خواهد بود.

(ج) همینطور که نیوشا و فیروزه مشغول بازی بودند ناگهان ۷ نفر دیگر از دوستان قماربازشان به آنها ملحق شدند. در آن شلوغی نیوشا با خود فکر کرد آیا ممکن است بتواند با یک تاس سالم یک بازی طراحی کند که احتمال برد هر یک از این ۹ نفر در آن بازی برابر باشد. نظر شما چیست؟

مساله ۴

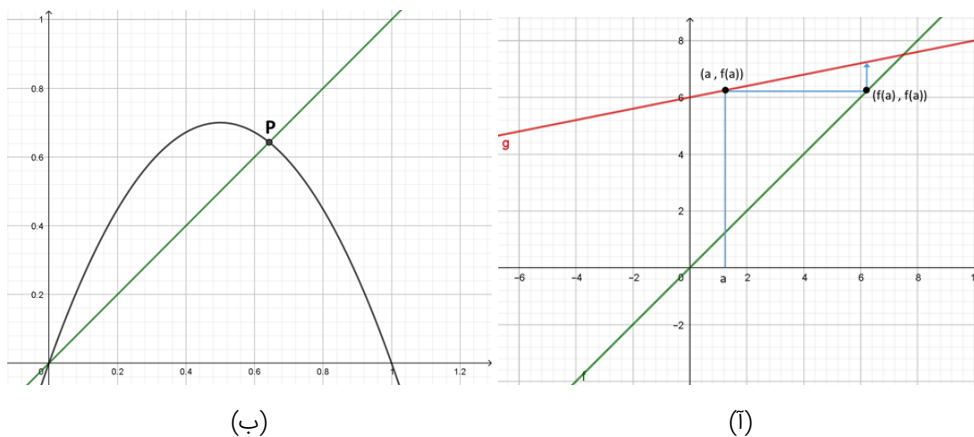
نیوشا تصمیم گرفته است با پول‌هایی که از شرط‌بندی‌هایش به دست آورده، سرمایه‌گذاری کند. او به آقای شلی که یک دانشجوی رشته‌ی اقتصاد است، اعتماد می‌کند و پول‌هایش را در اختیار او می‌گذارد. متاسفانه شلی درس‌هایش را در دانشگاه خوب نخوانده است و همین باعث شده که پول نیوشا هر ماه، m برابر شود که $0 < m < 1$ (!). به همین دلیل هم نیوشا هر ماه مقدار ثابت d به آقای شلی پول می‌دهد تا به سرمایه‌اش اضافه کند. سرمایه‌ی نیوشا که در دست آقای شلی است را در ماه n ام با a_n نمایش می‌دهیم.

$$(A) \quad a_{n+1} \text{ را بر حسب } a_n \text{ و } m \text{ و } d \text{ به دست آورید.}$$

(ب) اگر در ابتدای کار، سرمایه‌ی a_0 در اختیار آقای شلی گذاشته شده باشد، آیا در درازمدت سرمایه‌ی نیوشا که دست آقای شلی است، به عدد خاصی نزدیک می‌شود؟ اگر پاسختان مثبت است، این عدد چیست؟

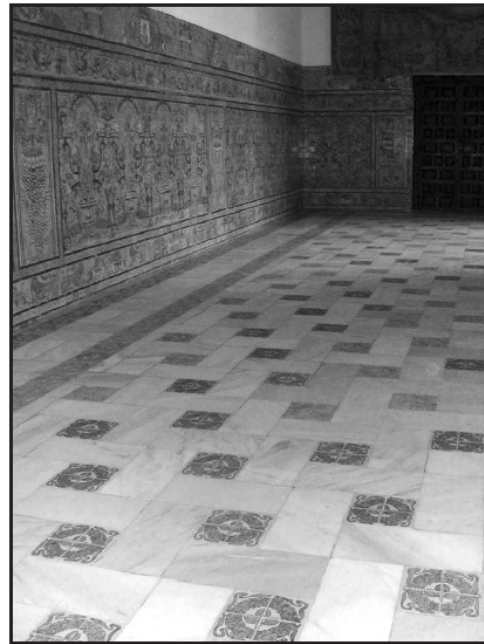
(ج) نمودار a_{n+1} بر حسب a_n را در نظر بگیرید (شکل (A)). آیا می‌توانید برای پاسخ قسمت‌های قبل، توجیه هندسی پیدا کنید؟

(د) اگر نمودار a_{n+1} بر حسب a_n نموداری مثل شکل (ب) داشته باشد، با توجه به قسمت قبل توجیه کنید که برای هر $0 < a_0 < 1$ دنباله مورد نظر به نقطه‌ی p نزدیک می‌شود.



مساله ۵

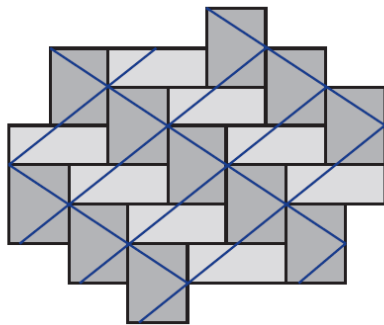
نیوشا که به ایتالیا رفته است، از یکی از موزه‌های شهر میلان دیدن می‌کند. در حین بازدید از موزه، چند الگوی کاشی‌کاری که در موزه قرار دارد، توجه او را به خود جلب می‌کند. از آنجایی که قضیه‌های ریاضی همیشه ذهن او را مشغول می‌کنند، با دیدن این کاشی‌کاری‌ها احساس می‌کند که می‌تواند بعضی از قضیه‌هایی که قبلاً دیده است را با الهام گرفتن از الگوی این کاشی‌ها، اثبات کند. شما هم به نیوشا کمک کنید:



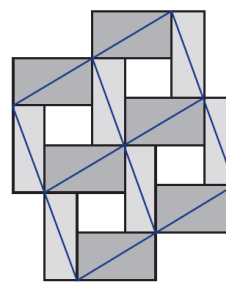
(آ) با استفاده از تصویر (آ)، نابرابری حسابی-هندسی را اثبات کنید. (برای a و b که اعداد حقیقی و مثبت اند نشان دهید که: $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$)

(ب) اتحاد سینوس جمع دو زاویه را از شکل (ب) نتیجه بگیرید. (ثابت کنید: $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$)
 (ج) برای هر چهار عدد حقیقی a و b و x و y ، نابرابری کوشی-شوارتز را با استفاده از الگوی شکل (ج) اثبات کنید.

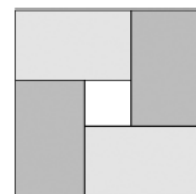
$$|ax + by| \leq (\sqrt{a^2 + b^2})(\sqrt{x^2 + y^2})$$



(ج)



(ب)



(آ)

مساله ۶

نیوشا در ایتالیا کسب و کارش را تغییر داده است و تصمیم گرفته تعدادی سکه‌ی تقلبی به مردم غالب کند. با این حال، از آن‌جا که حافظه‌ی خوبی ندارد، فراموش کرده کدام‌یک از ۲۰ سکه‌ای که دارد، تقلبی و کدام یک از آن‌ها اصل است اما می‌داند

وزن سکه‌های تقلبی بین $10/6$ تا $10/7$ و وزن سکه‌های واقعی بین 11 تا $11/1$ گرم است. از آن‌جا که زمان برای کلاهبرداری مانند نیوشا خیلی مهم است، او می‌خواهد در حداکثر 15 بار اندازه‌گیری با کمک یک ترازوی یک‌کفه‌ای، سکه‌های تقلبی را پیدا کند. روشی برای این کار به او ارائه دهید یا نشان دهید چنین کاری ممکن نیست!

معرفی‌نامه

در چند خط خودتان را معرفی کنید و بگویید چرا دوست دارید در مدرسه زمستانی علوم ریاضی شریف، حضور پیدا کنید.